16. Forum für Begabungsförderung in Mathematik
21.-23.03.2013 an der Universität Würzburg

Ekkehard Kroll, Mainz

Über universelle Konstruktionen in der Dynamischen Geometrie

Abstract

Die Systeme der Dynamischen (besser: Kinematischen) Geometrie geben den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, sich im Zugmodus die Auswirkungen von Veränderungen an den Startelementen auf das Konstruktionsergebnis unmittelbar anzuschauen. Allerdings misslingt dies in manchen Situationen, wenn Sonder- oder Randfälle der Ausgangssituation bei der Konstruktion außer Acht gelassen wurden, also in diesem Sinne die Konstruktion nicht universell genug angelegt war. Andererseits verlangt gerade die anzustrebende Universalität der Konstruktion eine intensive Auseinandersetzung mit dem geometrischen Problem, so dass der Lerneffekt nachhaltiger ist als bei einer Behandlung nur der reinen Standardfälle. Dies soll an einigen Beispielen wie dem Wechselspiel von Pol – Polare oder der Konstruktion der Chordalen (Potenzgeraden) zweier Kreise verdeutlicht werden.

Einleitung

Im vergangenen Sommersemester (SS 2012) hatte ich Gelegenheit, als Gast an einem Fachdidaktikseminar teilzunehmen, in dem Lehramtsstudierende über den Fortschritt an ihren Masterarbeiten berichteten. Einige präsentierten dabei *GeoGebra* Anwendungen, in denen physikalische Experimente simuliert wurden wie zum Beispiel aus der Optik die Lichtbrechung an einer Linse. Im Zugmodus konnte in diesem Fall der Abstand des Objekts von der Linse und auch die Größe des Gegenstandes verändert werden, was entsprechende Veränderungen am Bild erzeugte. Bei Überschreitung bestimmter Bereiche funktionierte diese Demo jedoch nicht mehr. Auch bei anderen Gelegenheiten war mir schon aufgefallen, dass sich Studierende schnell mit der Standardlösung eines geometrischen Problems zufrieden geben und nicht untersuchen, was in Sonder- und Randfällen passieren kann. Es wäre aber nützlich und lehrreich, wenn sich die Studierenden (und ggf. später ihre Schülerinnen und Schüler) Gedanken über Spezial- oder Randfälle machen und die Konstruktionen so anlegen würden, dass ein „Abdriften“ in nicht definierte (d. h. hier nicht konstruierte bzw. nicht konstruierbare) Situationen unmöglich ist. In diesem Sinne sollten die Konstruktionen „universell“ sein. An zwei Beispielen aus der ebenen Kreisgeometrie soll dies kurz erläutert werden.

Beispiel 1: Die Dualität Pol – Polare

I Konstruktion der Polaren p eines Punktes P am Kreis K mit *EUKLID DynaGeo*

Gegeben sei ein Punkt P außerhalb eines Kreises K. Legen wir von P die Tangenten an den Kreis und verbinden wir die Berührungspunkte durch eine Gerade, so erhalten wir die **Polare** p zum **Pol** P. Diese Konstruktion versagt, wenn P auf dem Kreis K oder im Innern von K liegt. Dem entsprechend verschwindet die Polare p, wenn wir im Zugmodus den Punkt P so weit auf den Kreis K zu bewegen, dass P über die Kreislinie hinweg ins Innere eintritt.

Eine ähnliche Problematik tritt auf, wenn wir zu einer Geraden p, die den Kreis K in zwei Punkten schneidet, durch Schnitt seiner Tangenten in diesen den Pol P konstruieren: Sobald die Gerade p den Kreis nur noch in einem Punkt berührt oder ihn überhaupt nicht mehr trifft, verschwindet ihr Pol. Eine besondere

Problematik tritt auf, wenn die Gerade durch den Kreismittelpunkt geht, da dann die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit dem Kreis parallel sind.

II Algebraische / Analytische Behandlung

Legen wir ein kartesisches Koordinatensystem durch den Mittelpunkt des Kreises *K*, so wird *K* durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

beschrieben. Die Gleichungen der Tangenten t_i von $P(x_p, y_p)$ an *K* mit den Berührungspunkten $B_i(x_i, y_i), i = 1,2,$ lauten dann bekanntlich

$$x_i x + y_i y = r^2, i = 1,2.$$

Es ist also wegen $P(x_p, y_p) \in t_i$:

$$x_i x_p + y_i y_p = r^2, i = 1,2.$$

Folglich geht die Gerade

$$\boxed{x x_p + y y_p = r^2}$$

durch die beiden Punkte $B_i(x_i, y_i), i = 1,2,$ und ist daher die Polare *p* von $P(x_p, y_p)$. Diese Gleichung definiert auch eine Gerade, wenn $P(x_p, y_p)$ auf dem Kreis *K* oder in seinem Innern liegt. Liegt $P(x_p, y_p)$ auf *K*, so ist die Polare die Tangente an *K* in *P*. Fällt *P* mit dem Kreismittelpunkt $O(0,0)$ zusammen, so wird die Polarengleichung nach Übergang zu homogenen Koordinaten zur Gleichung der Ferngeraden.

Ist $Q(x_q, y_q)$ ein Punkt auf der Polaren *p* von $P(x_p, y_p)$, so gilt

$$x_q x_p + y_q y_p = r^2 .$$

Also liegt $P(x_p, y_p)$ auf der Polaren

$$q : x_q x + y_q y = r^2$$

von $Q(x_q, y_q)$. Diesen offensichtlich umkehrbaren Sachverhalt können wir auf folgende Kurzformel bringen:

$$\boxed{Q \in p \Leftrightarrow P \in q}$$

III Universelle Polaren-Konstruktion mit *EUKLID DynaGeo*

Suchen wir also die Polare *p* eines Punktes *P* am Kreis *K*, so können wir – gleichgültig ob *P* außerhalb oder innerhalb des Kreises oder auf seinem Rand liegt – zu zwei Geraden q_1, q_2 durch *P*, die den Kreis in jeweils zwei Punkten schneiden durch Schnitt der zugehörigen Kreistangenten die Pole Q_1, Q_2 konstruieren, deren Verbindungsgerade die Polare *p* von *P* ist (Abbildung 1):

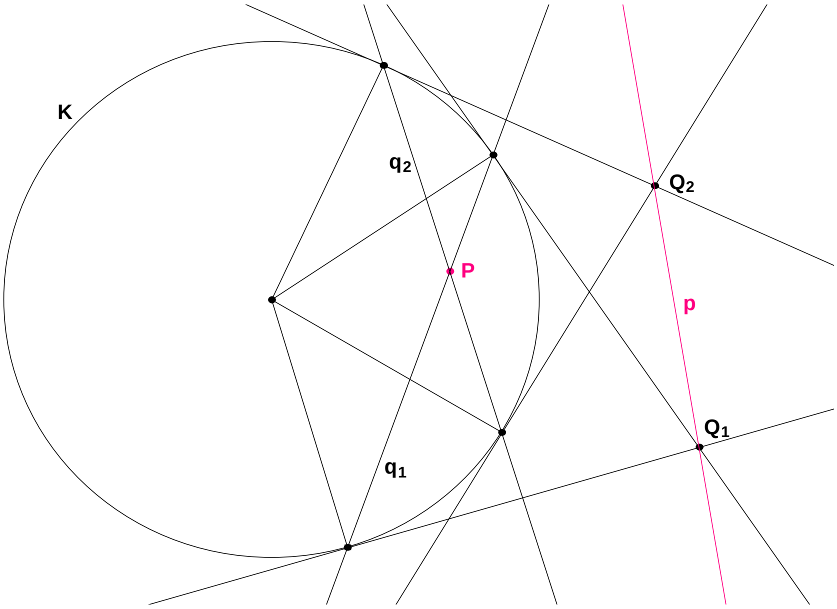

Abb. 1

Ist umgekehrt eine Gerade p außerhalb des Kreises gegeben, so wähle man zwei Punkte Q_1,Q_2 auf p, konstruiere deren Polaren q_1,q_2 und schneide diese im Pol P von p.

Um die Polaren-Konstruktion etwas zu vereinfachen und gleichzeitig zu standardisieren, wählen wir als q_1 die Verbindungsgerade von P mit dem Kreismittelpunkt, Q_1 wird dann zum Fernpunkt aller Lote auf q_1. Als q_2 nehmen wir die Gerade durch P und den Schnittpunkt von K mit der Senkrechten auf q_1 im Kreismittelpunkt. Den Pol Q_2 von q_2 mit Q_1 verbinden – projektiv gedacht – heißt – affin konstruiert – die Parallele zu einem Lot auf q_1 durch Q_2 zeichnen, also gleich das Lot von Q_2 auf q_1 fällen (Abbildung 2):

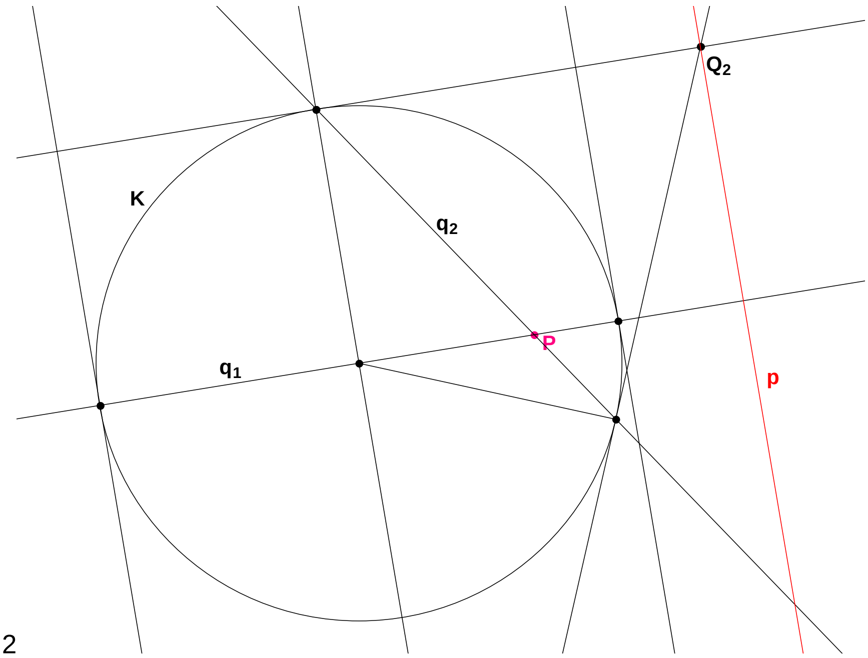

Abb. 2

Die hier vorgestellte universelle Konstruktion ist besonders geeignet, ein neues Werkzeug (Makro) „Polare” zu erstellen, das zu einem gegebenen Kreis mit Mittelpunkt M und gegebenem Punkt $P \neq M$ in jeder Situation die Polare p liefert.

Eine analoge Konstruktion liefert den Pol P einer Geraden p, die nicht durch M geht.

(Inzwischen bietet *EUKLID DynaGeo* solche Werkzeuge in seiner Konstruktionsliste an.)

Beispiel 2: Die Chordale (Potenzgerade) zweier Kreise

Alle Punkte, deren Tangentenabschnitte an zwei gegebene nicht-konzentrische Kreise gleich lang sind, liegen auf der selben Geraden, der sogenannten ***Chordalen*** (auch als ***Potenzgerade*** bezeichnet) dieser beiden Kreise, die orthogonal zu deren *Zentralen*, also der Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte, verläuft.

Beweis durch eine einfache Koordinatenrechnung (Abbildung 3):

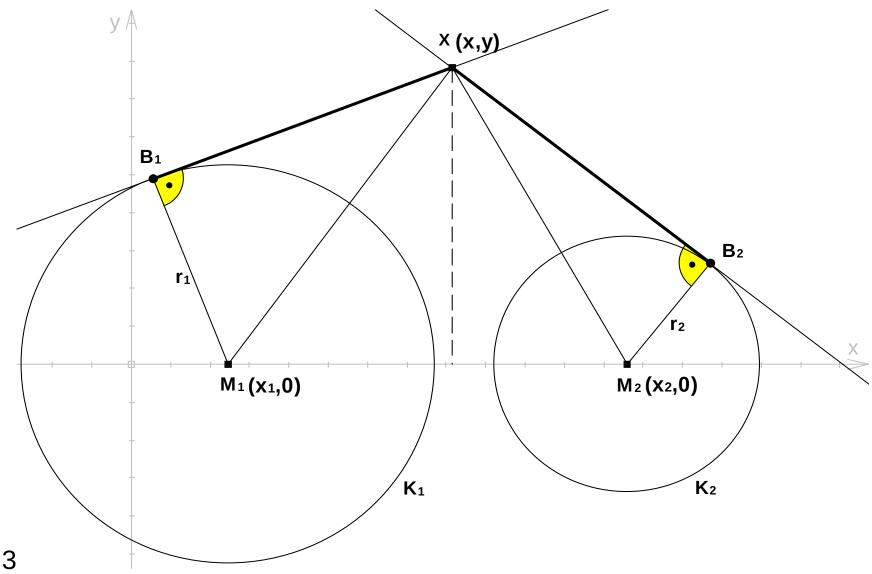

Abb. 3

OBdA mögen die Mittelpunkte $M_1(x_1,0)$ und $M_2(x_2,0)$ der beiden Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r_1 bzw. r_2 auf der x-Achse liegen, die damit zur Zentralen der beiden Kreise wird. Dann lautet die Bedingungsgleichung für einen Punkt $X(x,y)$, dessen Tangentenabschnitte an K_1 und K_2 gleich lang sein sollen:

$$(x - x_1)^2 + y^2 - r_1^2 = (x - x_2)^2 + y^2 - r_2^2$$

Hieraus folgt:

$$2(x_2 - x_1)x = c \quad \text{mit} \quad c = x_2^2 - x_1^2 + r_1^2 - r_2^2$$

Bei nicht konzentrischen Kreisen ist $x_2 \neq x_1$, so dass sich die Gleichung $x = c/(2(x_2 - x_1))$ ergibt, also die Gleichung einer Geraden senkrecht zur x-Achse und somit senkrecht zur Zentralen.

Wenn sich die beiden Kreise berühren, ist die gemeinsame Tangente die Chordale, wenn sie sich schneiden, stellt die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte ihre Chordale dar, wobei es allerdings von deren Punkten im Innern der Kreise keine Tangenten an die Kreise gibt.

Im Falle von drei gegebenen Kreisen schneiden sich die drei Chordalen je zweier Kreise in einem gemeinsamen Punkt, dem ***Chordalpunkt*** (***Potenzpunkt***) der drei Kreise; denn der Schnittpunkt von zwei der drei Chordalen besitzt auf Grund der Transitivität der Gleichheitsrelation gleich lange Tangentenabschnitte an allen drei Kreisen, liegt also auch auf der dritten Chordalen. Diese Tatsache kann zur Konstruktion der Chordalen zweier gegebener Kreise, die sich nicht schneiden, benutzt werden, indem ein Hilfskreis gewählt wird, der beide Kreise schneidet, und indem dann die beiden Chordalen der sich schneidenden Kreise zum Schnitt gebracht werden: Der

Schnittpunkt ist der Chordalpunkt aller drei Kreise und das Lot von diesem auf die Zentrale der gegebenen Kreise ist deren gesuchte Chordale (Abbildung 4):

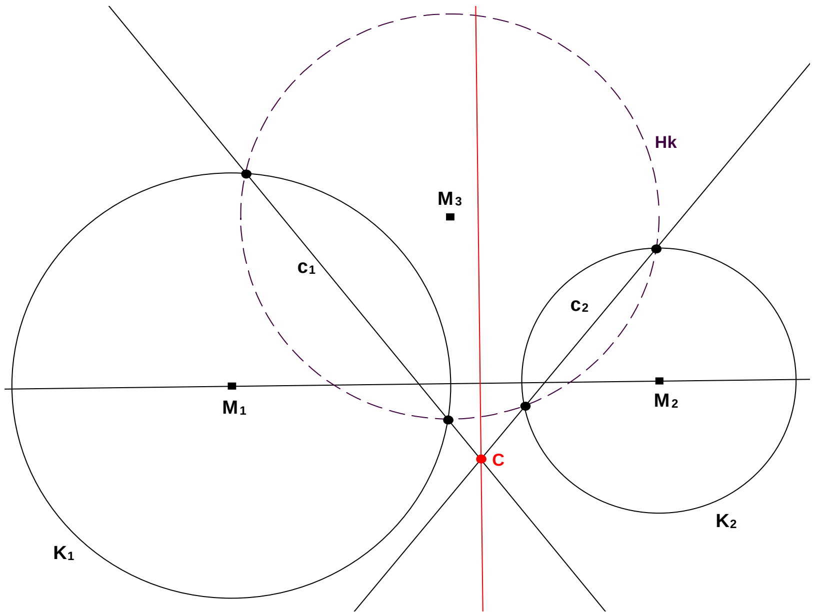

Abb. 4

Universell, d. h. alle Lagen im Zugmodus meisternd, wird die Konstruktion allerdings erst, wenn der Hilfskreis *Hk* eine spezielle Lage erhält, die an die Lage der gegebenen Kreise K_1 und K_2 gekoppelt ist: Dazu wird die Zentrale M_1M_2 mit K_1 und K_2 geschnitten und *Hk* durch die äußeren Schnittpunkte S_1 und S_2 gelegt, wobei M_3 auf der Mittelsenkrechten der Strecke S_1S_2, jedoch nicht auf dieser gewählt wird (Abbildung 5):

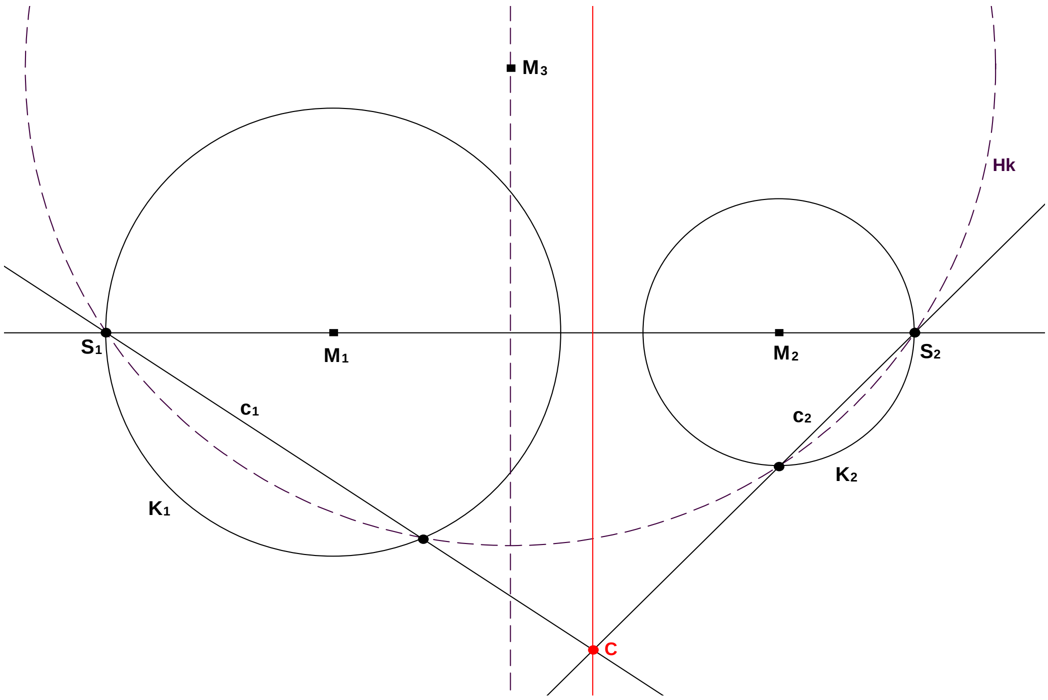

Abb. 5

Diese universelle Konstruktion ist ebenfalls geeignet, ein neues Werkzeug (Makro) „Chordale" zu erstellen, das zu zwei gegebenen nicht-konzentrischen Kreisen in jeder Situation deren Potenzgerade liefert.

Abschlussbemerkung

Zur Kompetenz, ein gestelltes Problem zu lösen, gehört m. E. auch die Fähigkeit, sich kritisch mit dem Resultat auseinander zu setzen: Löst es die gestellte Aufgabe korrekt und vollständig, d. h. auch wenn die Ausgangsdaten – in einem zulässigen Rahmen – geändert werden? In vielen Bereichen sind nämlich die Ausgangsbedingungen nicht immer eindeutig festgelegt oder sogar gewollt wandelbar. Natürlich: Eine Speziallösung für einen ganz bestimmten Spezialfall kann nur diesen lösen, aber das muss dann auch so deklariert werden. Ansonsten aber muss überlegt werden, welche Spannweite Variablen haben können und wie eine Lösung aussehen muss, damit sie solchen Veränderungen gewachsen ist; andernfalls können in vielen Anwendungsbereichen (Bau- und Maschinentechnik, IT-Bereiche, Sicherheitstechnik, ...) kostspielige, evtl. sogar gefährliche Pannen auftreten.

Die dynamische Geometrie bietet eine gute Gelegenheit, zunächst im Studium und dann als Lehrer(in) mit den Schüler(inne)n solche Tugenden zu üben.

Literatur

Scheid, Harald: Elemente der Geometrie. – Mannheim; Wien; Zürich: BI-Wiss.-Verlag, 1991.

Dr. Ekkehard Kroll
FB 08 Physik, Mathematik, Informatik
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität
55099 Mainz

kroll@uni-mainz.de

Nachtrag

In der Diskussion wurde auf die Geometrie-Software *Cinderella* von J. Richter-Gebert und U. Kortenkamp hingewiesen, die dem Nutzer das Problem einer universellen Konstruktion weitgehend abnimmt. Das trifft in der Tat zu, da *Cinderella* projektive Geometrie über dem Komplexen bietet und – beispielsweise – die Gerade durch die Schnittpunke zweier Kreise auch dann noch anzeigt, wenn die beiden Kreise beim Auseinanderbewegen keine reellen Schnittpunkte mehr haben. Damit kommen wir zu einer wichtigen Überlegung **vor** Beginn einer Konstruktion, nämlich der Wahl der für eine gestellte Konstruktionsaufgabe optimalen Software. Allerdings wäre eine solche Vorüberlegung nur möglich, wenn unsere Schulen für das Unterrichten in Mathematik am Computer über mehrere Systeme verfügen würden. Nach meinen Kenntnissen stehen aber meist nur EUKLID DynaGeo und (zunehmend) GeoGebra zur Verfügung. *Cinderella* trifft man nur gelegentlich an, obwohl eine erweiterte Schullizenz bereits für 199 EUR zu haben ist (www.cinderella.de).

E. K.