

Linienland, Flächenland und der Hyperraum – Ein Ausflug durch die Dimensionen

Stephan Rosebrock

Pädagogische Hochschule Karlsruhe

23. März 2013

- 1 Linienland und Flächenland
- 2 Raumland
- 3 Hyperraum

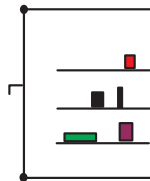
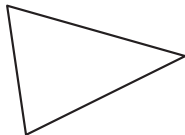
- Man stelle sich vor: Alle Wesen leben in einer Linie,
- nur zwei Nachbarn die man im Leben sieht,



In Flächenland

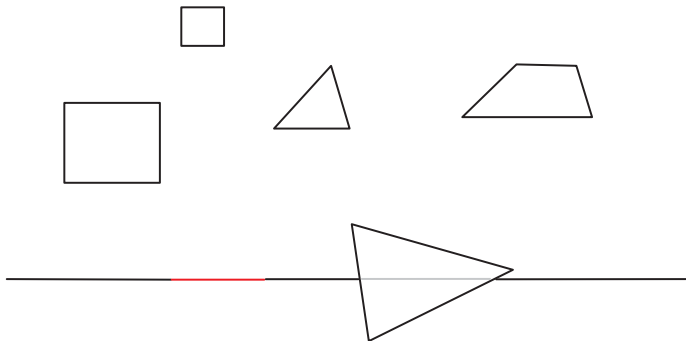
- leben alle Wesen auf einer Fläche
- sie können nicht „hoch“ oder „runter“ gucken
- es gibt nur „rechts“ und „links“ und „hinten“ und „vorne“

Flächenenland



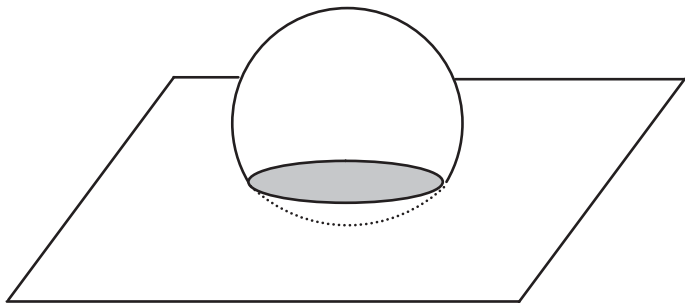
- Wie können Flächenlandbewohner den Linienländern ihr Land erklären?
- Wenn Linienland in Flächenland ist, tauchen sie durch.

Linienland in Flächenland



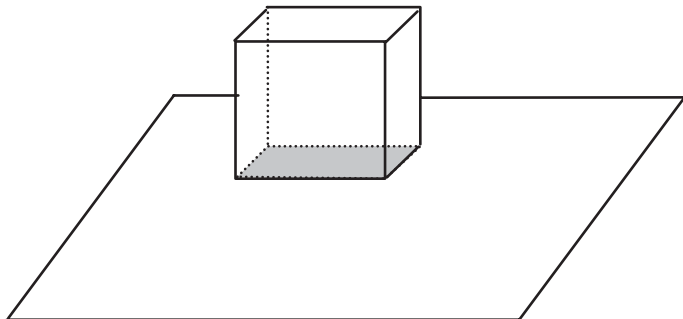
- Wir sind in Raumland.
- Wir müssen Flächenländern unseren Raum erklären.
- Das geht, wenn Flächenland in unserem Raumland liegt.
- Wir tauchen Gegenstände durch.

Wie erklären wir eine Kugel?

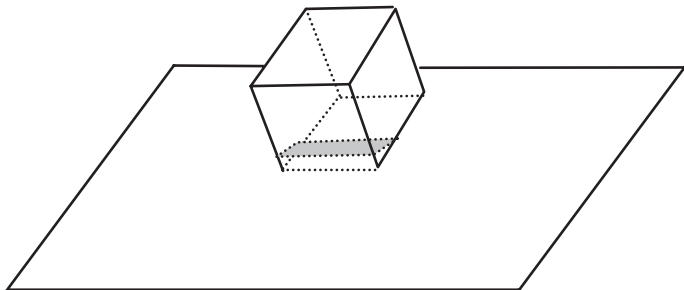


Wie erklären wir eine Würfel?

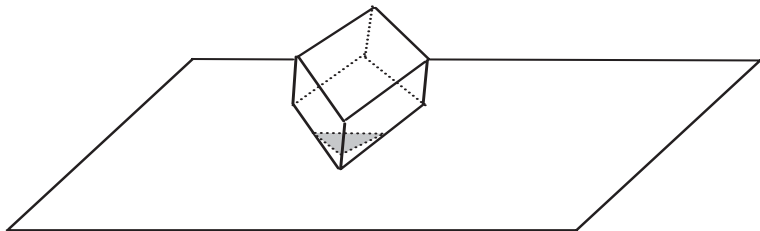
Der Würfel taucht entlang eines Randquadrats in Flächenland ein.



Würfel entlang einer Kante in Flächenland.

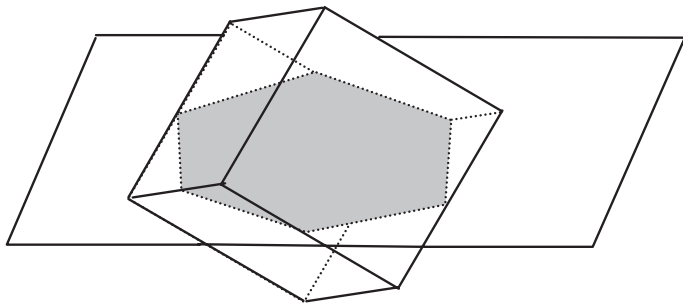


Würfel entlang einer Ecke in Flächenland.



Wie sieht es aus, wenn der Würfel weiter durchtaucht?

Flächenland in Raumlant



Bisher hatten wir

- Linienland (1-dimensional, vorne - hinten)
- Flächenland (2-dimensional, vorne - hinten, rechts - links)
- Raumland
(3-dimensional, vorne - hinten, rechts - links, oben - unten)
- Und dann?

Hyperraum

4-dimensional

vorne - hinten, rechts - links, oben - unten, ana - kata

vier zueinander senkrechte Richtungen

passt nicht in unseren Raum

Wie sieht ein 4-dimensionaler Würfel (ein *Hyperwürfel*) aus?

Was ist ein Würfel?

Die konvexe Hülle aller Ecken 0 und 1 auf den Koordinatenachsen.

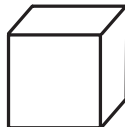
Definition Würfel



W^1



W^2



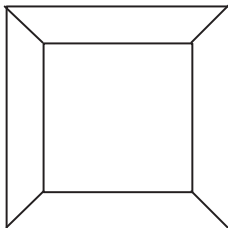
W^3

Die Eckenzahl verdoppelt sich immer.

Die Eckenzahl ist 2^d bei einem d -dimensionalen Würfel.

Definition Würfel

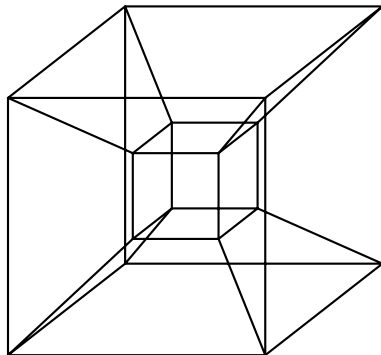
Wir könnten einen 3-dimensionalen Würfel auch so zeichnen:



Im Bild ist ein kleiner 2-dimensionaler "Würfel" in einem Großen.
Und ein 4-dimensionaler Hyperwürfel?

Definition Würfel

4-dimensionaler Hyperwürfel W^4 mit 16 Ecken:



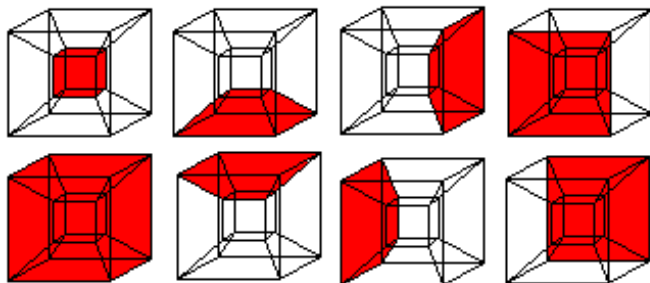
An jeder Ecke gehen 4 Kanten aus. Alle senkrecht zueinander.

Wie viele 3-dimensionale Würfel gibt es im Rand des Hyperwürfels?
Zwischen je 3 Kanten an einer Ecke ist ein Randwürfel. D.h. 4
Randwürfel an jeder Ecke (bei 16 Ecken). Jeder Würfel ist in 8 Ecken.

$$\frac{16 \cdot 4}{8} = 8 \text{ Randwürfel}$$

Randwürfel des Hyperwürfels

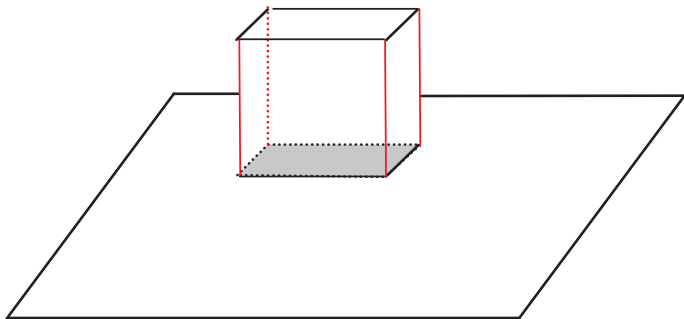
Die 8 Randwürfel:



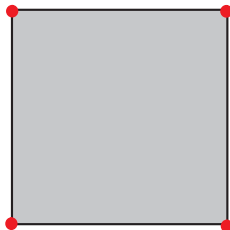
Wie war das: Würfel durch Ebene (mit einem Randquadrat zuerst)?

- Eine Richtung zum Durchtauchen (rot), zwei Richtungen sieht man.
- Man sieht von jeder roten "Durchtauchkante" einen Punkt, der wird Ecke des Quadrats, welches man sieht.

Flächenland in Raumlant



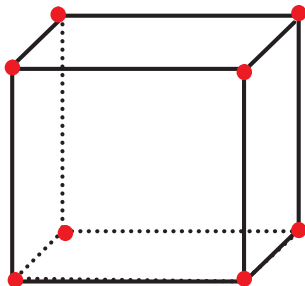
Das Quadrat entsteht beim Durchtauchen in Flächenland.



- Tauche Hyperwürfel durch Raumland, zuerst mit Randwürfel.
- Wir sehen also zuerst einen normalen Würfel.
- 3 Richtungen sieht man, eine (rote) zum Durchtauchen.

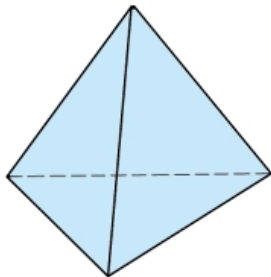
- An jeder Ecke geht eine rote Kante in kata-Richtung.
- Die wird von unserem Raum geschnitten und sieht wie eine Ecke aus.
- Bei 8 Ecken am Anfang sehen wir also immer 8 (rote) Ecken.
- Wir sehen immer einen ganz normalen Würfel.

Der Schnitt eines 4-dimensionalen Würfels mit unserem Raum beim Durchtauchen mit einem Randwürfel zuerst.



- Tauche Hyperwürfel durch Raumland, mit einer Ecke zuerst.
- Wir sehen also zuerst eine Ecke.
- und kurz danach?
- Alle 4 Kanten, die von der Ecke weggehen, liegen mit jeweils einem Punkt in Raumland.
- 4 Punkte, mit dem selben Abstand zueinander.

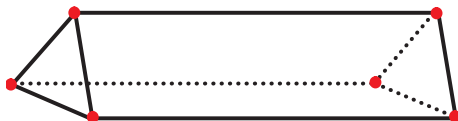
Wir sehen einen Tetraeder.



Der wird immer größer.

- Tauche Hyperwürfel durch Raumland, mit einer Kante zuerst.
- Wir sehen also zuerst eine Kante.
- und kurz danach?
- Jede Ecke wird durch Schnitte mit 3 Kanten ersetzt
- An jeder Ecke entsteht ein gleichseitiges Dreieck.

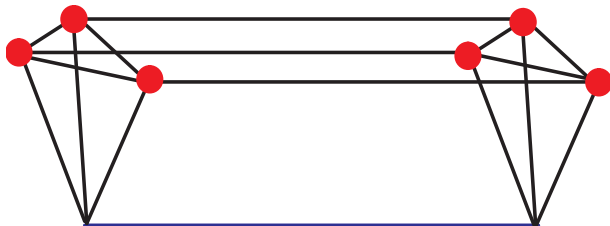
Der Schnitt eines 4-dimensionalen Würfels mit unserem Raum beim Durchtauchen mit einer Randkante zuerst.



Ein Prisma über einem gleichseitigen Dreieck

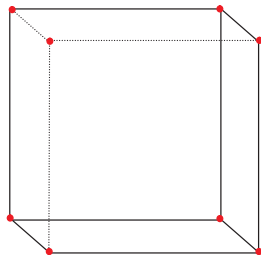
Flächenland in Raumlant

Mit der blauen Kante taucht man ein.



- Tauche Hyperwürfel durch Raumland, mit einem Randquadrat zuerst.
- Wir sehen also zuerst eine Quadrat.
- und kurz danach?
- Jede Ecke wird durch Schnitte mit 2 Kanten ersetzt
- An jeder Ecke entsteht eine Kante und das Quadrat wird "aufgedickt".

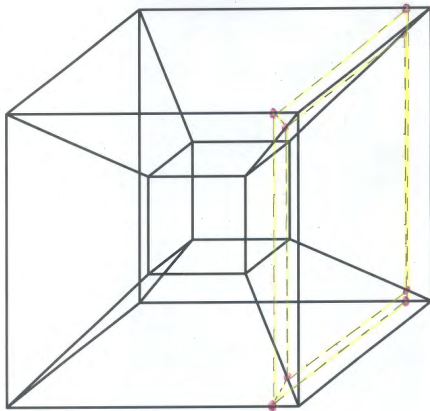
Der Schnitt eines 4-dimensionalen Würfels mit unserem Raum beim Durchtauchen mit einem Quadrat zuerst.



Ein Quader.

Flächenland in Raumlant

Der Quader im 4-dimensionalen Würfel.



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.