Dr. Anca Popa
22. März 2013

# Aufgabenvorschläge zur Begabungsförderung

Aufgabe 1 Es seien drei kongruente Kreise gegeben, die einen gemeinsamen Punkt $H$ haben und sich paarweise in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Es bezeichnen $A, B, C, H$ die Schnittpunkte dieser Kreise. Beweisen Sie, dass der Umkreis des $\Delta ABC$ zu den gegebenen Kreisen kongruent ist (Gh. Ţiţeica).

Aufgabe 2 Beweisen Sie, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ die Menge

$$\left\{ \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen enthält.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Summe der größten ungeraden Teiler der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 Finden Sie die letzte von Null verschiedene Ziffer der Zahl 1000!.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{3}$ keine Nullstelle eines Polynoms höchstens 2. Grades mit (nur) rationalen Koeffizienten ist.

Aufgabe 6 Beweisen Sie, dass die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *ungerade* keine rationalen Lösungen besitzt.

Aufgabe 7 In einer Ebene seien ein Kreis mit Radius 1 und die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ (beliebig) gegeben. Beweisen Sie, dass auf dem Kreis ein Punkt $P$ existiert, der folgender Ungleichung genügt:

$$\|PA_1\| + \|PA_2\| + \ldots + \|PA_n\| \geq n.$$

(M. Colţoiu)

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ die folgenden Lösungen besitzt:

$$\tan\frac{\pi}{8},\ \tan\frac{3\pi}{8},\ \tan\frac{5\pi}{8},\ \tan\frac{7\pi}{8}.$$

*Hinweis: Die Gleichung* $\tan^2(2\alpha) = 1$ *hat u. a. die Lösungen* $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$. *Außerdem gilt die Formel* $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $(\forall\ \alpha \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\})$.

Aufgabe 9 Es sei $f(x) := a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$) ein Polynom mit reellen Koeffizienten und mit (nur) reellen Nullstellen, die alle im Intervall $(-1, 1)$ liegen. Beweisen Sie:

$$-1 < \frac{a_1 + a_3 + a_5 + \ldots}{a_0 + a_2 + a_4 + \ldots} < 1.$$

(M. Becheanu)

*Hinweis: Es seien* $x_i$ *mit* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *die Nullstellen. Es gilt also* $f(x) = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$. *Aus* $x_i \in (-1, 1)$ *folgt:* $\exists\, \alpha_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *mit* $x_i = \cos(2\alpha_i)$. *Es ist* $1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha$, $1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$.

Aufgabe 10 Es sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge mit der Eigenschaft

$$a_{n-1} + a_{n+1} = \sqrt{2} \cdot a_n \quad \forall\, n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge ist.

Aufgabe 11 Es seien $x, y \geq 0$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Beweisen Sie, dass dann $2^x + 2^y \geq 3$ gilt. Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 12 Für welche $n \in \mathbb{N}$ endet $n!$ auf genau 1000 Nullen?

Aufgabe 13 Lösen Sie (in $\mathbb{R}$) die Gleichung $x^8 + y^8 = 8xy - 6$.

Aufgabe 14 Falls $2^{2005}$ genau $m$ Ziffern und $5^{2005}$ genau $n$ Ziffern hat, berechnen Sie $m + n$.

Aufgabe 15 Jedes Element der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$ wird mit einer der Farben rot, gelb, blau gefärbt (jede Farbe wird verwendet), nach folgenden Regeln:

- Die Summe jeder gelben mit jeder blauen Zahl ist durch 3 teilbar,
- die Summe jedwelcher zweier roten Zahlen ist durch 3 teilbar.

a) Beweisen Sie, dass 3 rot gefärbt ist.

b) Berechnen Sie die Summe aller Zahlen dieser Menge, die nicht rot gefärbt sind.