Dr. Anca Popa
Universität Regensburg

Vom Nutzen der Aufgabensammlungen zur Begabungsförderung

Vortragsskript
16. Forum für Begabungsförderung, Universität Würzburg, 22. März 2013

Einleitung

Mein heutiger Vortrag zur Begabungsförderung bezieht sich auf den Nutzen, ja sogar auf die Notwendigkeit des selbstständigen Lösens von Aufgaben – und wenn ich Aufgaben sage, so meine ich eher Probleme und nicht einfache Übungsaufgaben. Das Aufgabenlösen setzt aber die Existenz und Kenntnis geeigneter Aufgabensammlungen voraus.

Nach einer Einleitung werde ich einige Aufgaben mitsamt Lösung vorstellen, die meiner Meinung nach geeignet sind, mathematische Begabung zu fördern. Diese und weitere Aufgaben – insgesamt 15 – habe ich für Sie als Kopie mitgebracht; Sie können sich gerne Exemplare am Ende des Vortrags mitnehmen (im Netz auf dieser Seite zu finden unter „Aufgabenvorschläge“).

Beginnen möchte ich mit einem Zitat von Pólya zu den Aufgaben allgemein:

„Eine Aufgabe haben bedeutet, *bewußt nach einer Handlungsweise suchen, die dazu angetan ist, ein klar erfaßtes, aber nicht unmittelbar erreichbares Ziel zu erreichen* [kursiv im Original]. Eine Aufgabe lösen bedeutet, eine solche Handlungsweise entdecken. Eine Aufgabe ist eine ‚große‘ Aufgabe, wenn sie sehr schwierig ist, sie ist nur eine ‚kleine‘ Aufgabe, wenn sie nicht sehr schwierig ist. Aber ein gewisser Grad von Schwierigkeit gehört zu dem Wesen des Begriffs der Aufgabe: Wo es keine Schwierigkeit gibt, gibt es auch keine Aufgabe.“

(Aus: „Vom Lösen mathematischer Aufgaben“, Birkhäuser Verlag, Basel 1966, Band 1, Kap. 5.)

Die Existenz einer Aufgabe impliziert nach Pólya das Vorhandensein einer inneliegenden Schwierigkeit. Damit kann man Aufgabensammlungen, wenn man so will, auch als „Sammlung von Schwierigkeiten“ bezeichnen. Selbstverständlich ist die Frage „Wozu sind Schwierigkeiten nützlich?“ berechtigt. Dass man an Schwierigkeiten – genauer gesagt an der Überwindung von Schwierigkeiten – wächst, möchte ich in diesem Vortrag schon aus zeitlichen Gründen nicht weiter thematisieren. Wichtiger ist für mich hier und heute die Frage „Wie überwindet man die Schwierigkeiten in Aufgaben?“. Die kurze, aber nicht einfache Antwort lautet: „Mit guten Ideen!“. Wie kommt man aber auf gute Ideen?

Nun, dass es in der Mathematik keinen „Universalschlüssel“ gibt, ist eine Tatsache, die einerseits das „Handwerk Mathematik“ so schwierig erscheinen lässt und andererseits gerade eine Quelle ihres besonderen Reizes ausmacht. Selbst die besten Bücher, die Strategien zum Lösen von Aufgaben vorstellen, sind nicht hinreichend für die erfolgreiche Lösung jedwelcher Aufgabe. Derartige Bücher sind aber meiner Meinung nach notwendig, denn sie geben wertvolle Anregungen/Stimuli, wie man die den Aufgaben inneliegenden Schwierigkeiten überwinden kann.

Nach Pólya gilt: „Gute Ideen beruhen auf Erfahrung und früher erworbenem Wissen.“ Während eine Lehrkraft beim erworbenen Wissen eine entscheidende Rolle spielen kann, muss man Erfahrung hingegen selber sammeln. Mathematische Erfahrung sammelt man am besten mit guten Aufgabensammlungen an seiner Seite. Die Rolle der Lehrkraft ist es hinsichtlich des Sammelns von Erfahrung vor allem, entscheidende Hinweise auf gute Aufgabensammlungen zu geben.

Das selbstständige Aufgabenlösen bietet eine Reihe von Vorteilen, u. a.

- wird das bereits erworbene Wissen am besten mit dem Lösen von Aufgaben gefestigt.
- fördert es eine aktive Haltung gegenüber der Mathematik sowie die Selbstständigkeit (und erleichtert damit auch den Übergang Schule/Hochschule), die Einsicht, das Verständnis und die Kreativität.
- wird nicht nur das Wissen gesichert, sondern es werden auch fundamentale „geistige Operationen“, wie z. B. die Analyse, die Synthese, der Vergleich, die Abstrahierung und die Verallgemeinerung gefestigt und erweitert.

Die „Kurzfassung“ dieser Einleitung könnte folgender Satz sein, der z. B. im Prolog zum „Hungarian Problem Book“ steht, aber bestimmt nicht die einzige und wahrscheinlich auch nicht die erste Stelle ist, an dem dieser Satz auftaucht:
„The best way to learn mathematics is to do mathematics.“

Getreu diesem Motto beende ich jetzt meine Rede – die Einleitung – und wende mich im Folgenden der Mathematik – den Aufgaben – zu.

Einige Aufgabenbeispiele

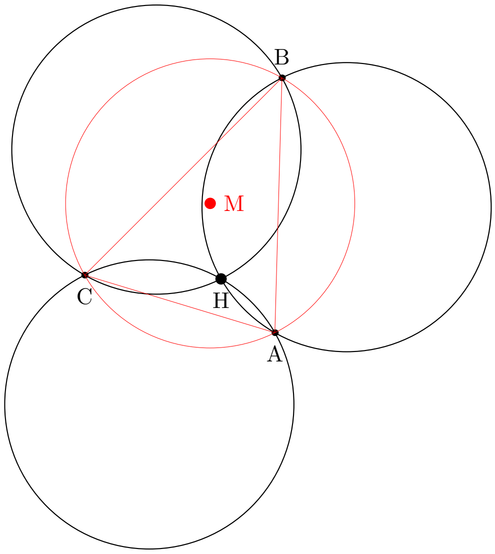
Die 1. Aufgabe, die ich Ihnen vorstellen möchte, ist eine Geometrieaufgabe. Geometrieaufgaben erfordern eine große gedankliche Flexibilität und fördern im besonderen Maße das kreative Denken.

Diese Aufgabe stammt von Gheorghe Ţiţeica (1873–1939). Man erzählt, dass Gh. Ţiţeica diese Eigenschaft entdeckte, als er wartend, aus Langeweile Kreise mit einer Münze zeichnete. Die Aufgabe lautet:

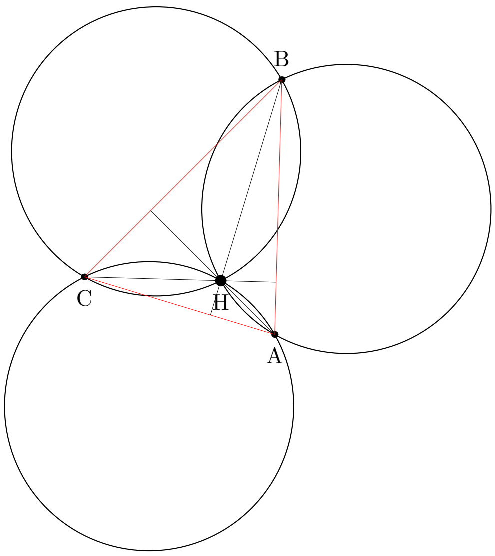
Aufgabe 1

Es seien drei kongruente Kreise gegeben, die einen gemeinsamen Punkt H haben und sich paarweise in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Es bezeichnen A, B, C, H die Schnittpunkte dieser Kreise. Beweisen Sie, dass der Umkreis des ΔABC zu den gegebenen Kreisen kongruent ist.

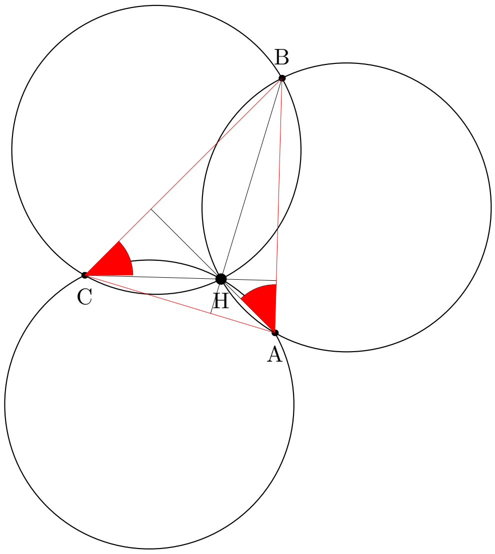
Skizze



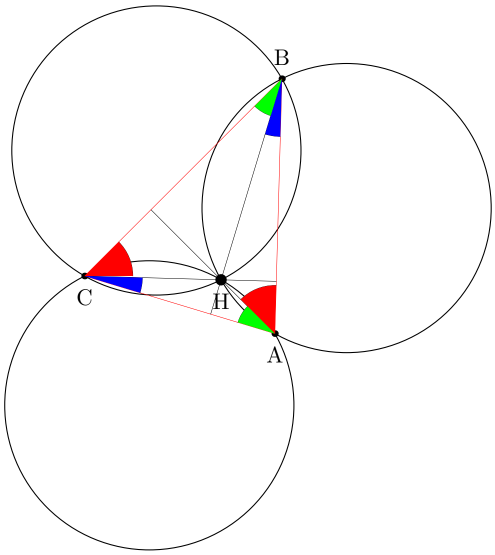
1. Beweis der Aufgabe 1 In einem 1. Beweis dazu wollen wir die Rolle des Punktes H klären, denn H genießt im Vergleich zu den Punkten A, B, C eine stärkere Voraussetzung. Dass H nicht gerade der Mittelpunkt des Umkreises von ΔABC ist, legt schon obige Skizze nahe. Ziehen wir die Geraden HA, HB, HC ein, so regt die nächste Skizze die Vorstellung an, dass es sich bei H um den Höhenschnittpunkt (das „Orthozentrum“) des Dreiecks handeln könnte.



In der Tat folgt aus der Kongruenz der Ausgangskreise, dass z. B. die zwei kleinen Bögen $\overset{\frown}{HB}$ über der Sehne $\overline{HB}$ kongruent sind. Mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes können wir dann schließen, dass die Winkel $\sphericalangle BAH$ und $\sphericalangle HCB$ kongruent sind.

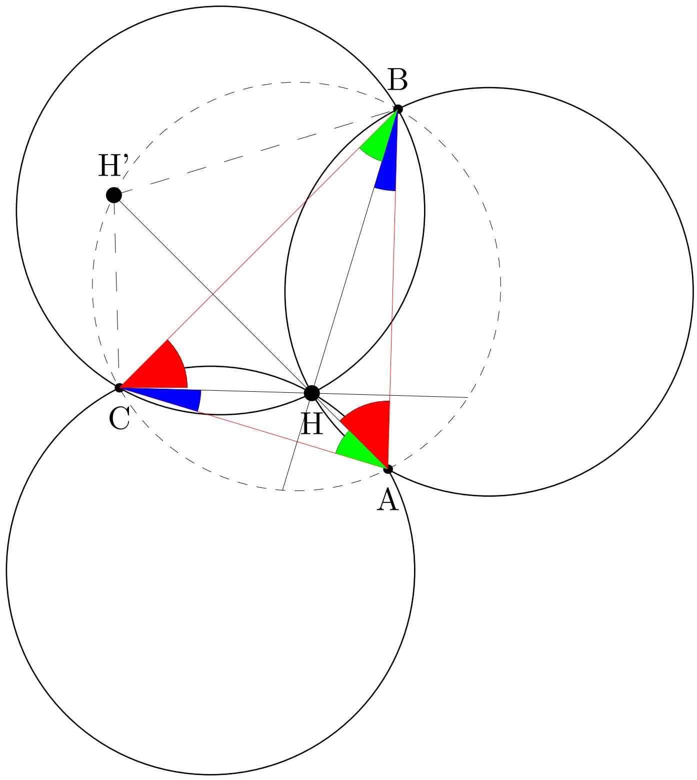


Analog folgt die Kongruenz zweier weiterer Winkelpaare, nämlich $\sphericalangle HAC \equiv \sphericalangle CBH$ und $\sphericalangle ACH \equiv \sphericalangle HBA$.



Mit Hilfe der Winkelsumme im ΔABC und obiger Winkelkongruenzen folgt, dass $HA \perp BC$, $HB \perp AC$ und $HC \perp AB$ gilt. H ist in der Tat das Orthozentrum des Dreiecks ABC.

Nun kommt das „früher erworbene Wissen" ins Spiel. Wir erinnern uns an folgende Eigenschaft: Der *Spiegelpunkt* des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks an einer Dreiecksseite liegt auf dem Umkreis des Dreiecks. Es bezeichne H' der an der Dreiecksseite $\overline{BC}$ gespiegelte Punkt H.

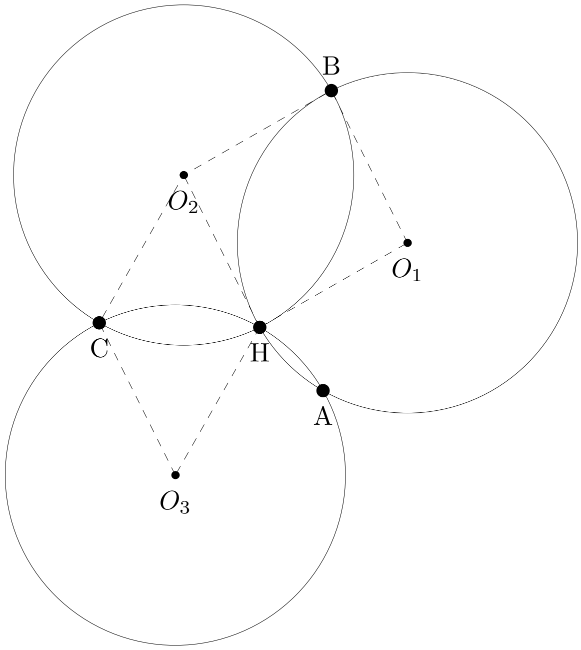


Damit können wir, statt des Dreiecks ABC das Dreieck BCH' betrachten, denn diese zwei Dreiecke haben denselben Umkreis. Das Dreieck BCH' ist aber zum Dreieck BCH kongruent, damit sind auch dessen Umkreise kongruent. Das Dreieck BCH liegt aber auf einem der Ausgangskreise, was den 1. Beweis beendet. □

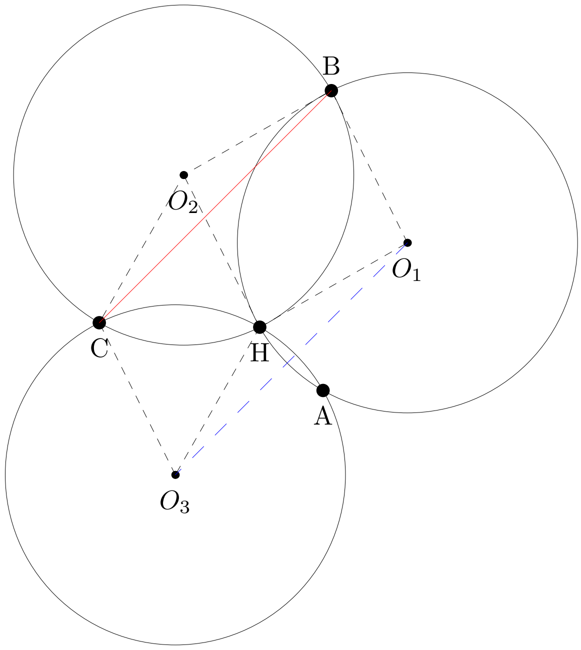
Oft ist in der Geometrie selbst mit einem vollständigen Beweis keine innerliche Endstation erreicht, denn die Frage nach einfacheren und schöneren Lösungen drängt sich schon aufgrund der Anschaulichkeit der Geometrie auf. Ebenfalls stellt sich die Frage nach möglichen weiteren Eigenschaften im gegebenen Kontext.
Einfachere Lösungen – im Sinne von leichter nachvollziehbar, nicht unbedingt bezogen auf das Finden der Lösung – setzen in der Regel geschickte Hilfskonstruktionen voraus. Das ist der Moment der höchsten Herausforderung der Vorstellungskraft und der Eigeninitiative, wobei man dabei gleichzeitig aufpassen muss, dass die Hilfskonstruktion nicht überladen wird (und damit sich selbst hinderlich wird).

2. Beweis der Aufgabe 1 Suchen wir nach einem 2. Beweis für diese Aufgabe, suchen wir also nach einer guten Hilfskonstruktion, weil die Ausgangssituation sehr karg ist. Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise ins Spiel zu bringen, ist hier noch sehr naheliegend. Schwieriger ist die Frage zu beantworten, welche Punkte man anschließend verbinden sollte.

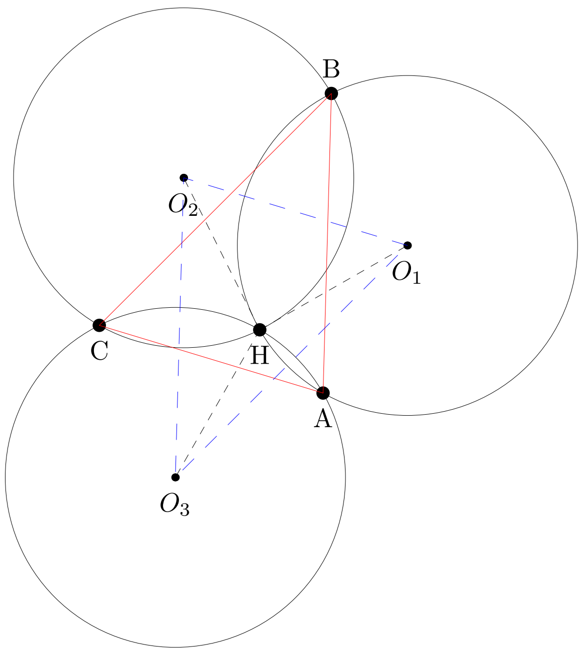
Betrachten wir folgende Hilfskonstruktion:



Hier entsteht ein Wechselspiel zwischen Parallelität und Kongruenz. Die Vierecke BO_2HO_1 und O_2CO_3H sind Rauten, da alle Vierecksseiten gleich lang sind. Damit folgt aber $BO_1 \parallel O_2H$ und $O_2H \parallel CO_3$, also $BO_1 \parallel CO_3$. Zusammen mit $\overline{BO_1} \equiv \overline{CO_3}$ folgt, dass das Viereck BCO_3O_1 ein Parallelogramm ist. Insbesondere gilt dann $\overline{BC} \equiv \overline{O_1O_3}$.

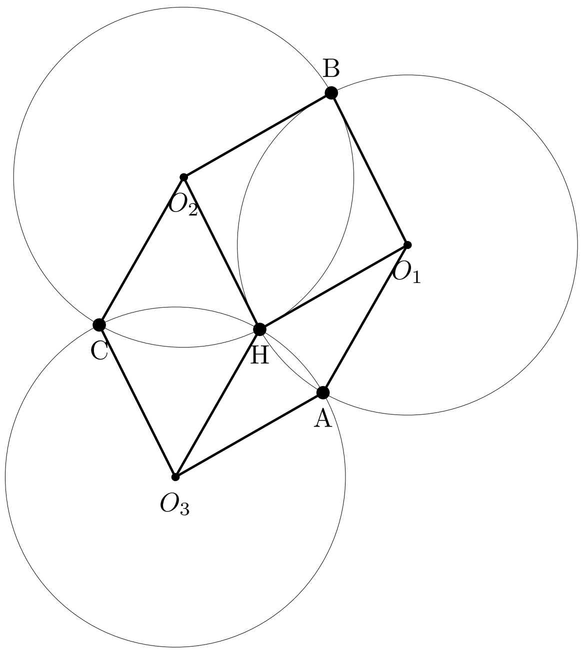


Analog folgen $\overline{BA} \equiv \overline{O_2O_3}$ und $\overline{CA} \equiv \overline{O_2O_1}$. Es ist somit $\Delta ABC \equiv \Delta O_2O_3O_1$. Insbesondere haben diese zwei Dreiecke gleich große Umkreise.

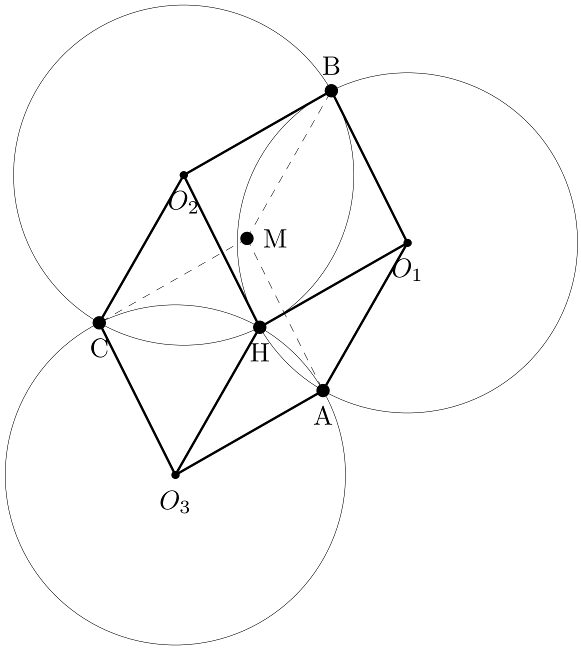


Der Umkreis des Dreiecks $O_2O_3O_1$ ist aber zu den Ausgangskreisen kongruent, denn H ist der Mittelpunkt des Umkreises von $\Delta O_2O_3O_1$ und der Radius ist $\|HO_1\|$, also der Ausgangsradius. $\square$

3. Beweis der Aufgabe 1 Diese Aufgabe hat auch Pólya beschäftigt. Im 2. Band von „Vom Lösen mathematischer Aufgaben“ gibt er einen bemerkenswerten Beweis dafür. Hier sieht man sehr eindrucksvoll die einleuchtende Kraft einer guten Hilfskonstruktion, einer guten Idee also. Pólya trägt noch eine Raute ein, tritt einen Schritt zurück, betrachtet die Skizze und erkennt dabei die zweidimensionale Darstellung eines Würfels.

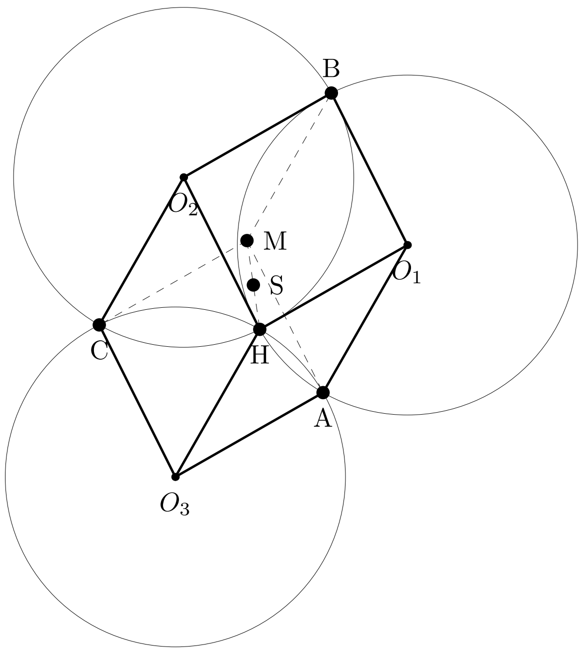


Der 8., nicht sichtbare Punkt des Würfels ist genau der Mittelpunkt des Dreiecks ABC,



denn er ist gleichweit von den Punkten A, B und C entfernt. Darüber hinaus folgt aus den Eigenschaften des Würfels, dass die Strecke $\overline{BM}$ zur Strecke $\overline{AO_1}$ kongruent ist. $\square$

Um ein Beispiel weiterer Eigenschaften, die in diesem Kontext bemerkt werden können, zu geben, betrachten wir in Pólyas Hilfskonstruktion die Würfeldiagonale $\overline{HM}$ und ihren Mittelpunkt S.



Spiegelt man das Dreieck ABC an S, so entsteht das Dreieck $O_2O_3O_1$. Der Mittelpunkt H des Umkreises des Dreiecks $O_2O_3O_1$ ergibt, an S gespiegelt, den Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC.

Verlassen wir nun die Geometrie und widmen uns für die nächste Aufgabe der Kombinatorik.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ die Menge

$$\left\{ \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen enthält.

Beweis Hier ist es wesentlich, nicht ins Detail zu gehen und jede einzelne Zahl zu untersuchen (ob sie gerade oder ungerade ist), sondern den Überblick zu behalten. Die gute Idee lautet hier: Es reicht zu zeigen, dass die Summe dieser Zahlen ungerade ist.

Es ist $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{also } \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} = 2^{n-1} - 1 = \text{ungerade},$$

somit gibt es eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen in dieser letzten Summe. $\square$

Die 3. Aufgabe ist eine Zahlentheorieaufgabe, die ganz besonders vom Wert einer guten Idee profitiert. Ohne eine gute Idee erweist sich das Lösen dieser Aufgabe als besonders schwierig. Diese Aufgabe habe ich Studenten in Regensburg, im Rahmen einer Vorlesung und Übung zur Zahlentheorie, lösen lassen und ich selbst hatte als Schülerin, nachdem ich diese Aufgabe von meinem Mathematiklehrer über das Wochenende hinweg gestellt bekommen hatte, drei Tage lang große Mühe gehabt, das Ergebnis zu erraten und dieses dann anhand von vollständiger Induktion zu beweisen. Viele Jahre später, als mir diese Aufgabe erneut begegnete, erschien sie mir im Lichte einer entscheidenden Idee wesentlich leichter zu handhaben.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Summe der größten ungeraden Teiler der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Die erste Beweisidee würde ich nicht einmal „Idee“ nennen; es handelt sich um eine triviale Feststellung: Die ungeraden Zahlen haben sich selbst als größten ungeraden Teiler. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe ist, innerhalb der Teilfolge der geraden Zahlen für die größten ungeraden Teiler ein Muster zu erkennen. Die Kernidee, die sehr leicht nachzuvollziehen ist, besteht darin, diese Teilfolge der geraden Zahlen durch eine andere Teilfolge zu ersetzen, die aber dieselbe zugeordnete Folge der größten ungeraden Teiler besitzt und die wesentlich leichter zu handhaben ist. Genauer gesagt, ersetzen wir die Teilfolge $2, 4, 6, \ldots, 2^n$ mit der Folge der halbierten Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$, denn der Faktor 2 trägt mit nichts zum größten ungeraden Teiler bei. Der Vorteil dieser Idee liegt darin, dass damit die neue Folge $1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$ der Ausgangsfolge ähnelt; sie ist praktisch die Ausgangsfolge, nur auf einer niedrigeren Stufe. Das erlaubt uns, folgendes Schema zu erstellen:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1, 2, 3, \ldots, 2^n \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1 & & \begin{array}{c} 2, 4, 6, \ldots, 2^n \\ 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1} \end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & 1, 3, 5, \ldots, 2^{n-1} - 1 & & \begin{array}{c} 2, 4, 6, \ldots, 2^{n-1} \\ 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-2} \end{array} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & & \text{etc.} &
\end{tikzcd}$$

Der restliche Lösungsweg ist mit dem bereits erworbenen Wissen (Summe arithmetischer und geometrischer Folgen) leicht zu bewältigen. Die gesuchte Summe ist (dabei wird in jeder eckigen Klammer der Beitrag aus einem Schritt hervorgehoben):

$$[1 + 3 + \ldots + (2^n - 1)] + [1 + 3 + \ldots + (2^{n-1} - 1)] + \ldots + [1 + 3] + [1] + [1].$$

Es ist (Summe einer arithmetischen Folge mit Differenz 2):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2^k - 1) = 4^{k-1} \; \forall \; k \geq 1.$$

Damit lautet die gesuchte Summe:

$$4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 4 + 1 + 1 = 1 + (1 + 4 + \ldots + 4^{n-1}) =$$
$$= 1 + \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}.$$

$\square$

Eine leichtere Aufgabe – ebenfalls im Bereich der Zahlentheorie – lautet:

Aufgabe 4

Finden Sie die letzte von Null verschiedene Ziffer der Zahl 1000!.

Beweis Die Zahl 1000! endet auf viele Nullen – genauer gesagt auf 249 Nullen. Gefragt ist nach der Ziffer die vor diesen 249 Nullen steht. Die Schwierigkeit liegt hier in der Größe dieser Zahl. Deswegen schauen wir uns zunächst die folgende stark vereinfachte Aufgabe an: Finden Sie die letzte von Null verschiedene Ziffer der Zahl 10!. Die Antwort dazu ist leicht zu geben: Es ist

$$2 \cdot \underbrace{3 \cdot 4}_{2} \cdot 5 \cdot \underbrace{6 \cdot 7}_{2} \cdot \underbrace{8 \cdot 9}_{2} \cdot 10$$

und damit ist die letzte von Null verschiedene Ziffer von 10! genau 8.
Den Übergang von 10! zu 1000! können wir mit folgender Idee bewältigen: Jedes Produkt von zehn aufeinander folgenden Zahlen hat als letzte von Null verschiedene Ziffer genau die letzte Ziffer von 10!, denn modulo 10 haben zehn aufeinander folgende Zahlen die Reste $1, 2, \ldots, 9, 0$ – eventuell in anderer Reihenfolge – was aufgrund der Kommutativität der Multiplikation gar nicht störend ist.
Die gesuchte Ziffer ist somit die letzte Ziffer von $8^{100} = (8^4)^{25}$ und das ist 6. □

Die von mir verwendete Literatur lautet:

Literatur

[1] G. Pólya: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, Bände I und II, 1966.

[2] G. Pólya: *Schule des Denkens*, Francke Verlag, Tübingen und Basel, 1995.

[3] L. Nicolescu, A. Bumbăcea, A. Catană, P. Horja, Gh. Niculescu, N. Oprea, C. Zara: *Metode de rezolvare a problemelor de geometrie*, Editura univ. din Bucureşti, 1998.

[4] Gh. Andrei, C. Caragea, I. Cucurezeanu, Gh. Bordea: *Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare*, Editura did. şi ped., Bucureşti, 1993.

[5] L. Nicolescu, V. Boskoff: *Probleme practice de geometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1990.

[6] L. Pîrşan, C.-G. Lazanu: *Probleme de algebră şi trigonometrie*, Editura FACLA, Timişoara, 1984.

[7] N. Teodorescu (coord.): *Culegere de probleme, partea a II-a*, Societatea de ştiinţe matematice, Bucureşti.

[8] D. Buşneag, I. Maftei: *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Scrisul românesc, Craiova, 1983.

[9] L. Panaitopol, C. Ottescu: *Probleme date la olimpiadele de matematică*, Editura did. şi ped., Bucureşti, 1976.

[10] V. Mangu: *Concursurile de admitere*, Editura Garamond, Bucureşti, 1993.

[11] Gh. Ţiţeica: *Culegere de probleme de geometrie*, Editura tehnică, Bucureşti, 1962 (4. Auflage).

Aufgabensammlungen in deutscher oder englischer Sprache

Einige Aufgabensammlungen in deutscher oder englischer Sprache die man zur Begabtenförderung gut einsetzen kann, sind u. a.

- A. Engel: *Problem-Solving Strategies*, Springer Verlag
- G. Hajós (ed.): *Hungarian Problem Book I+II*, Random House, 1955.
- N. Grinberg: *Lösungsstrategien. Mathematik für Nachdenker*, Verlag Harri Deutsch.
- T. Tao: *Solving mathematical problems: A personal perspective*, Oxford Mathematics.
- R. Gelca, T. Andreescu: *Putnam and beyond*, Springer Verlag.
- T. Andreescu, B. Enescu: *Mathematical olympiad treasures*, Birkhäuser Verlag.
- T. Andreescu, Z. Feng: *A path to combinatorics for undergraduates*, Birkhäuser Verlag.
- T. Andreescu, Z. Feng: *102 combinatorial problems*, Birkhäuser Verlag.
- T. Andreescu, Z. Feng: *103 trigonometry problems*, Birkhäuser Verlag.
- T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov: *Geometric problems on maxima and minima*, Birkhäuser Verlag.
- W. Engel, U. Pirl: *Mathematische Olympiade-Aufgaben mit Lösungen*, Aulis Verlag.